

Untersuchungen an einem Überschallplasmastrahl mit axialem Strom **, **

KLAUS RAGALLER

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 21 a, 1260—1269 [1966]; eingegangen am 6. April 1966)

Starting from a parallel jet concept the linearized magnetogasdynamic equations are solved for a supersonic free plasma jet with an axial current. The solution is given in terms of the magnetic pressure number. A critical magnetic pressure number depending on the MACH number is derived. Below this value standing periodic pressure waves occur, as in the gasdynamic case. For higher values the pressure distribution is non-periodic.

Experiments are performed with a supersonic argon jet. The MACH number is determined by the shock angle at a cone. The pressure distribution in the axis of the jet is measured by a pressure probe. The experimental results are consistent with the theoretical predictions.

Zum experimentellen Studium der Dynamik heißer Gase (Magnetogasdynamik) eignen sich die mit Plasmabrennern erzeugten Plasmastrahlen. Besonders vorteilhaft bei einem Vergleich mit anderen Plasmaquellen, wie z. B. Stoßwellenrohr oder Plasmakanone, ist die Stationarität und die relativ große Ausdehnung von Plasmastrahlen. Dagegen fällt ein Vergleich von Leitfähigkeit und Geschwindigkeit zuungunsten der Plasmastrahlen aus, was u. a. in den Verlusten an den wassergekühlten Düsen, die zur Formung des Strahls erforderlich sind, begründet ist.

Um hierin Verbesserungen zu erzielen, wird für die folgenden Untersuchungen ein hoher axialer Strom durch den Freistrahlgeschickt. Der gleiche Weg wurde unabhängig auch von PETERS¹ eingeschlagen, insbesondere im Hinblick auf den zur Strahlbeschleunigung günstigen Einfluß eigenmagnetischer Kräfte. In der vorliegenden Arbeit werden die Auswirkungen magnetischer Kräfte auf die Strahlstruktur im Überschallgebiet näher untersucht.

1. Problemstellung

Aus der Gasdynamik ist bekannt², daß ein sogen. unterexpandierter Überschallstrahl, der entsteht, wenn der Druck am Ende der LAVAL-Düse p_i höher als der Außendruck p_a ist, periodische Verengungen und Erweiterungen aufweist (Abb. 1). Entsprechend zeigt der Druckverlauf in der Achse an Engstellen des Strahls Maxima und an Erweiterungsstellen

Minima. Der Abstand zweier Verdichtungen wird als Wellenlänge λ bezeichnet.

Wird nun durch einen Überschallplasmastrahl dieser Struktur in axialer Richtung ein Strom geschickt und nimmt man an, daß durch den Strahlrand — definiert als diejenige Fläche, die die vom Düsenrand stammenden Teilchen durchlaufen — auch der leitfähige Bereich begrenzt ist, dann hat man einen Lichtbogen variablen Querschnitts, wie er von MAECKER³ untersucht wurde.

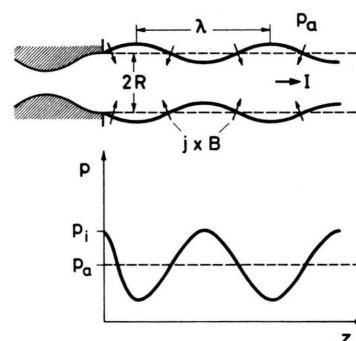


Abb. 1. Strahlrand und Druckverteilung in der Strahlachse beim periodischen Strahl.

Die magnetischen Kräfte, die durch das Zusammenwirken der Stromdichte j mit ihrem Eigenmagnetfeld B entstehen, bewirken eine axiale und radiale Beschleunigung des Plasmas. In Abb. 1 sind diese magnetischen Kräfte in den ursprünglichen Strahlverlauf eingezeichnet. Das Problem besteht im folgenden gerade darin, den Strahlverlauf unter dem

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München genehmigten Dissertation des Dipl.-Ing. KLAUS RAGALLER.

** Auszugsweise auch vorgetragen auf der VII. Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Belgrad 1965.

¹ TH. PETERS, Z. Naturforsch. 19 a, 1129 [1964].

² R. SAUER, Einführung in die Gasdynamik, Springer-Verlag, Berlin 1960.

³ H. MAECKER, Z. Phys. 141, 128 [1955].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Einfluß magnetischer Kräfte zu ermitteln. Die stationären Druckwellen modifizieren durch Veränderung des Strahlrandes die magnetischen Kräfte und umgekehrt wird durch letztere die Impuls- und Druckbilanz beeinflusst.

2. Theoretische Untersuchungen

2.1 Gleichungen

Zur Behandlung des Problems werden die magnetogasdynamischen Gleichungen in folgender Form verwendet:

$$\operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varrho(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$dp/d\varrho = nRT, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \quad (6)$$

Dabei ist:

ϱ = Dichte,
 p = Druck,
 T = Temperatur,
 \mathbf{v} = Geschwindigkeit,
 \mathbf{j} = Stromdichte,
 \mathbf{B} = magnetische Induktion,
 n = Polytropenexponent,
 \mathbf{E} = elektrische Feldstärke,
 μ = magnetische Permeabilität,
 R = Gaskonstante,
 σ = elektrische Leitfähigkeit.

Gl. (3) gilt bei Annahme einer polytropen Zustandsänderung $p \varrho^{-n} = \text{const}$ mit $1 < n < \gamma = c_p/c_v$. Aus Gl. (4) folgt durch Rotorbildung zusammen mit Gl. (5), wenn $\sigma = \text{const}$ angenommen wird,

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = \sigma \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Der Ausdruck $\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ wird zunächst Null gesetzt, was der Annahme kleiner magnetischer REYNOLDS-Zahlen entspricht. Dann gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = 0. \quad (7)$$

Der Einfluß der magnetischen REYNOLDS-Zahl auf die Lösung wird weiter unten diskutiert.

Reibungseinflüsse werden vernachlässigt, was im Strahl wegen der geringen Geschwindigkeitsgradienten gerechtfertigt ist. Am Strahlrand erzeugen sie jedoch eine turbulente Mischungszone. Deren Vorrücken in den Strahl mit zunehmendem Abstand vom Düsenende wird ebenfalls vernachlässigt.

2.2 Lösungsmethode

Der Überschallgasstrahl wurde erstmalig von PRANDTL⁴ theoretisch untersucht. Er geht von einem Parallelstrahl aus, der auch experimentell verwirklicht werden kann, wenn der Druck am Düsenende dem Außendruck gleich ist. Die Gleichungen werden dann linearisiert bezüglich der Abweichung aller Größen von ihren Werten im Parallelstrahl und durch einen Separationsansatz unter Berücksichtigung der Randbedingungen am Strahlrand gelöst. Die so gewonnene Lösung, die die Randbedingungen an der Düsenmündung nicht berücksichtigt, stimmt dennoch relativ gut mit experimentellen Beobachtungen überein, sogar in Bereichen, wo die Linearisierungsbedingungen nicht mehr erfüllt sind. Diese überraschende Tatsache wurde von PACK⁵ gedeutet.

Zur theoretischen Untersuchung des Überschallplasmastrahls mit axialem Strom wird das PRANDTLsche Verfahren auf die Gln. (1) bis (6) angewendet.

2.3 Parallelstrahl

Als Grundlösung wird wie bei PRANDTL ein Parallelstrahl verwendet (s. Abb. 2). Die Größen des Parallelstrahls werden mit dem Index 0 gekennzeichnet. Innerhalb des Strahls $0 < r < R$ werden

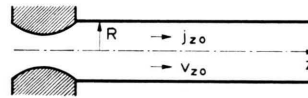


Abb. 2. Parallelstrahl mit axialem Strom.

konstante Geschwindigkeit v_{z0} und Stromdichte j_{z0} angenommen; außerhalb für $r > R$ seien beide Null. Aus Gl. (2) folgt unter diesen Annahmen:

$$\partial p_0 / \partial r = -j_{z0} B_{\varphi 0}. \quad (8)$$

$B_{\varphi 0}$ kann aus Gl. (6) bestimmt werden:

$$B_{\varphi 0} = \mu j_{z0} r / 2 \quad \text{für} \quad 0 < r < R. \quad (9)$$

Gl. (9) in Gl. (8) eingesetzt und integriert liefert die bekannte³ Druckerhöhung in einem zylindrischen Lichtbogen:

$$p_0(r) = \frac{1}{4} R^2 \mu j_{z0}^2 (1 - (r/R)^2) + p_a. \quad (10)$$

2.4 Linearisierung der Gleichungen

Die Abweichungen der einzelnen Größen von ihren Werten im Parallelstrahl werden Störgrößen

⁴ L. PRANDTL, Phys. Z. 5, 599 [1904].

⁵ D. C. PACK, Quart. J. Mech. Appl. Math. 3, 173 [1950].

genannt und durch einen Stern gekennzeichnet. In die Gleichungen ist die Summe von Grundgrößen und Störgrößen einzusetzen. Wird angenommen, daß die Störgrößen klein von erster Ordnung sind, dann dürfen deren Produkte in den Gleichungen vernachlässigt werden. Aus den nicht-linearen Gln. (1) und (2) folgt damit:

$$\varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* \operatorname{grad} \varrho_0 + \varrho^* \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \operatorname{grad} \varrho^* = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varrho_0 [(\mathbf{v}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \operatorname{grad}) \mathbf{v}_0] + \varrho^* (\mathbf{v}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{v}_0 \\ = -\operatorname{grad} p^* + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}^* + \mathbf{j}^* \times \mathbf{B}_0 \\ - \operatorname{grad} p_0 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0, \end{aligned} \quad (12)$$

und aus Gl. (3) wird:

$$\operatorname{grad} p^* = n R T_0 \operatorname{grad} \varrho^* + n R T^* \operatorname{grad} \varrho_0. \quad (13)$$

Die Gleichungen werden durch folgende Annahmen weiter vereinfacht: $\varrho_0 = \text{const}$ und $T_0 = \text{const}$. Dann wird aus Gl. (13):

$$\operatorname{grad} p^* = n R T_0 \operatorname{grad} \varrho^*, \quad (14)$$

wobei $n R T_0 = c^2$ konstant ist. c bedeutet für $n = \gamma$ die Schallgeschwindigkeit und wird deshalb im folgenden auch für beliebige n so genannt. In Gl. (11) fallen die Glieder mit $\operatorname{grad} \varrho_0$ und $\operatorname{div} \mathbf{v}_0$, in Gl. (12) die mit $\operatorname{grad} \mathbf{v}_0$ weg, ferner die beiden Glieder $\operatorname{grad} p_0$ und $\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0$, die sich nach Gl. (8) gegenseitig kompensieren. Die restlichen Gleichungen können, da sie linear sind, unmittelbar auf die Störgrößen angewendet werden.

2.5 „Periodischer Strahl“

Zunächst wird wie bei PRANDTL eine periodische Abhängigkeit der Störgrößen von der Achsenkoordinate z angesetzt, um die Lösung zu finden, die im Grenzfall verschwindenden Stroms in die gasdynamische Lösung übergeht.

2.51 Stromdichte und Magnetfeld

Aus den Gln. (6) und (7) können zunächst die elektrische Störstromdichte und das Störmagnetfeld berechnet werden. Aus Gl. (6) folgt $\operatorname{div} \mathbf{j}^* = 0$. Zusammen mit Gl. (7) erhält man daraus durch Elimination von j_r^* die Differentialgleichung für j_z^* :

$$\frac{\partial^2 j_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial j_z^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 j_z^*}{\partial z^2} = 0. \quad (15)$$

Für j_z^* wird angesetzt:

$$j_z^* = J \varphi(r) \sin \beta z, \quad (16)$$

wobei J ein konstanter Amplitudenfaktor ist. Für φ ergibt sich dann aus Gl. (15):

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta r/2)^{2n}}{(n!)^2} = I_0(\beta r); \quad (17)$$

mit $I_0(\beta r)$ = modifizierte BESSEL-Funktion nullter Ordnung⁶. Für I_0 ist die Reihenentwicklung um $r=0$ mit angegeben; mit dieser wird im folgenden weiter gerechnet, da eine geschlossene Berechnung nicht möglich ist.

Aus Gl. (7) folgt schließlich mit diesem Ergebnis:

$$j_r^* = -J \cos \beta z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\beta r/2)^{2n+1}}{[(n+1)!]^2}, \quad (18)$$

und aus Gl. (6):

$$B_\varphi^* = \frac{\mu}{r} J \sin \beta z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2n}}{(n!)^2} \frac{r^{2n+2}}{2n+2}. \quad (19)$$

2.52 Geschwindigkeit und Druck

Mit diesen jetzt bekannten Störgrößen stellen die Gln. (11), (12) und die beiden Komponenten von Gl. (14) ein System von vier Differentialgleichungen für die vier Unbekannten v_r^* , v_z^* , p^* und ϱ^* dar.

Durch Elimination von p^* und ϱ^* erhält man daraus die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial r} + \frac{v_r^*}{r} + (1 - M^2) \frac{\partial v_z^*}{\partial z} + \frac{j_r^* B_{\varphi 0} v_{z0}}{\varrho_0 c^2} = 0, \quad (20)$$

wobei die MACH-Zahl des ungestörten Strahls $M = v_{z0}/c$ eingeführt wurde.

In diese Gleichung wird mit folgendem Separationsansatz eingegangen:

$$\begin{aligned} v_r^* &= w f_1'(r) \cos \beta z, \\ v_z^* &= -w \beta f_2(r) \sin \beta z; \end{aligned} \quad (21)$$

w ist darin ein konstanter Amplitudenfaktor. Für die radiale Abhängigkeit der Störgrößen müssen zwei unabhängige Funktionen f_1 und f_2 eingeführt werden, da die Strömung nicht wie im gasdynamischen Fall rotationsfrei ist. Die Funktionen werden so gewählt, daß sie im gasdynamischen Grenzfall ineinander übergehen.

Zwischen f_1 und f_2 läßt sich allgemein aus Gl. (12) ein Zusammenhang gewinnen, wenn die r -Komponente dieser Gleichung nach $\partial p^*/\partial r$, die z -Komponente nach $\partial p^*/\partial z$ aufgelöst und erstere nach r , letztere nach z integriert werden. Man erhält so zwei

⁶ E. JAHNKE, F. EMDE u. F. LÖSCH, Tafeln höherer Funktionen, Teubner-Verlag, Stuttgart 1960.

Ausdrücke für die Druckstörung. Setzt man darin die Gl. (16) bis (19) und Gl. (21) ein, dann ergibt sich aus der r -Komponente:

$$p^* = \varrho_0 v_{z0} \beta w f_1 \sin \beta z - \mu j_{z0} J \sin \beta z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2n}}{(n!)^2} \frac{n+2}{(2n+2)^2} r^{2n+2}, \quad (22)$$

wobei der konstante Anteil der Entwicklung von f_1 als Integrationskonstante anzusehen ist, und aus der z -Komponente:

$$p^* = \varrho_0 v_{z0} w \beta f_2 \sin \beta z - \mu j_{z0} J \sin \beta z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\beta/2)^{2n} r^{2n+2}}{4[(n+1)!]^2}. \quad (23)$$

Ein Vergleich von Gl. (22) und (23) liefert:

$$f_1 - f_2 = \frac{2\alpha}{M^2 \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2n} r^{2n+2}}{4[(n+1)!]^2}, \quad (24)$$

wobei α definiert wird zu

$$\alpha = \mu j_{z0} v_{z0} J / (2 \varrho_0 c^2 w). \quad (25)$$

Aus Gl. (21) kann die Form des Strahlrandes $r_{\text{Rand}} = f(z)$ berechnet werden. Es gilt innerhalb der linearen Näherung:

$$\frac{dr_{\text{Rand}}}{dz} = \frac{v_r^*(\text{Rand})}{v_{z0}} = \frac{w f_1'(R) \cos \beta z}{v_{z0}}, \quad (26)$$

$$\text{bzw. } r_{\text{Rand}}(z) = \frac{w}{v_{z0}} \frac{f_1'(R)}{\beta} \sin \beta z + R. \quad (27)$$

Dieser Strahlrandverlauf entspricht genau dem in Abb. 1 dargestellten periodischen Strahl. Für die Wellenlänge λ gilt: $\lambda = 2\pi/\beta$. Auch der Druckverlauf nach Gl. (22) oder (23) stimmt mit dem in Abb. 1 dargestellten überein.

Nach dieser Vorarbeit kann jetzt die Lösung der Gl. (20) berechnet werden. Setzt man Gl. (21) und (24), sowie Gl. (18) und (9) in Gl. (20) ein, dann erhält man die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die Unbekannte $f_1(r)$:

$$f_1'' + \frac{1}{r} f_1' + m^2 \beta^2 f_1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2n+1} r^{2n+2}}{[(n+1)!]^2} \left(\frac{m^2}{M^2} + n + 1 \right) = 0, \quad (28)$$

$$\text{wo zur Abkürzung } m = \sqrt{M^2 - 1} \quad (29)$$

eingeführt wurde. Für verschwindenden Strom im Strahl, d. h. $j_{z0} = 0$ und somit nach Gl. (25) $\alpha = 0$, wird aus Gl. (28) die BESSELSche Differentialgleichung. Als Lösung ergeben sich in diesem Fall unmittelbar die Gleichungen der PRANDTL'schen Lösung.

Die hier interessierende partikuläre Lösung der Diff.-Gl. (28) läßt sich durch folgenden Potenzreihenansatz, in dem die Symmetriebedingung auf der Achse schon berücksichtigt ist, finden:

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n}. \quad (30)$$

Gl. (30) wird in Gl. (28) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1) c_{n+1} r^{2n} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) c_{n+1} r^{2n} + m^2 \beta^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n} \\ & - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{2n-1} r^{2n}}{(n!)^2} \left(\frac{m^2}{M^2} + n \right) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus für $n=0$:

$$c_1 = -\frac{1}{4} m^2 \beta^2, \quad (32)$$

und ab $n=1$ die Rekursionsformel

$$c_{n+1} = -\frac{m^2 \beta^2}{4(n+1)^2} c_n + \frac{\alpha(\beta/2)^{2n-1}}{4[(n+1)!]^2} \left(\frac{m^2}{M^2} + n \right). \quad (33)$$

Zweckmäßigerweise führt man folgende normierte Größen ein:

$$b = \beta R, \quad a = \alpha R^3 / M^2, \quad \varrho_r = r/R. \quad (34, 35, 36)$$

Mit diesen Größen gilt dann z. B. für die ersten Glieder der Reihe von f_2 :

$$\begin{aligned} f_2 = 1 - & \left(\frac{m^2 b^2}{4} + \frac{a}{2b} \right) \varrho_r^2 \\ & + \left(\frac{m^4 b^4}{64} + \frac{a b}{32} m^2 \right) \varrho_r^4 - \dots \end{aligned} \quad (37)$$

2.53 Randbedingungen

Die beiden Parameter b und J/w [s. Gl. (25)], die jetzt noch z. B. in Gl. (37) auftreten, werden mit Hilfe folgender beider Randbedingungen eliminiert:

Erstens muß am Strahlrand, der in erster Näherung durch $r=R$ oder $\varrho_r=1$ gegeben ist, die Druckstörung verschwinden, d. h.

$$p^*(\varrho_r=1) = 0. \quad (38)$$

Zweitens muß am Strahlrand, der ja auch als Grenze des leitfähigen Bereichs angenommen wird, der Stromdichtevektor parallel zum Geschwindigkeitsvektor sein, d. h. in linearer Näherung gilt:

$$j_r^*(R)/j_{z0} = v_r^*(R)/v_{z0}. \quad (39)$$

Normiert man Gl. (22) und setzt sie in Gl. (38) ein, dann erhält man:

$$f_1(\varrho_r = 1) = \frac{2a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b/2)^{2n}}{(n!)^2} \frac{n+2}{(2n+2)^2}. \quad (40)$$

Gl. (40) stellt einen Zusammenhang zwischen den beiden Größen b und a her.

Aus Gl. (39) folgt, wenn Gl. (18) und Gl. (21) eingesetzt werden:

$$\frac{J}{w} = \frac{j_{z0}}{v_{z0} R} \frac{-(df_1(\varrho_r)/d\varrho_r)_{\varrho_r=1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)(b/2)^{2n-1}}{[(n-1)!]^2}} = \frac{j_{z0}}{v_{z0} R} g(a, b). \quad (41)$$

In dem zur Abkürzung mit $g(a, b)$ benannten Bruch läßt sich mit Gl. (40) a eliminieren, so daß g nur noch eine Funktion von b allein wird: $g = g(b)$. Durch Division der Größe a durch diese Funktion erhält man den Ausdruck:

$$a/g(b) = C = \mu j_{z0}^2 R^2 / (2 \varrho_0 v_{z0}^2). \quad (42)$$

C hängt nur noch von Parametern des Parallelstrahls ab, die als gegeben angesehen werden. Deshalb wird die Lösung als Funktion von C dargestellt. Die Größe C kann anschaulich interpretiert werden, wenn nach Gl. (9) j_{z0} durch das Magnetfeld an irgendeiner Stelle, z. B. durch dasjenige am Strahlrand, ersetzt wird. Man erhält dann:

$$C = 2[B_{\varphi 0}^2(R)/(2\mu)]/[\varrho_0 v_{z0}^2/2] \quad (43)$$

$B_{\varphi 0}^2(R)/2\mu$ stellt den „magnetischen Druck“ am Strahlrand dar, $\varrho_0 v_{z0}^2/2$ den „Geschwindigkeitsdruck“ des Parallelstrahls. Das Verhältnis beider Größen wurde von COWLING⁷ eingeführt und wird daher als COWLINGsche Zahl bezeichnet.

2.54 Ergebnisse

In Abb. 3 ist die Wellenlänge als Funktion der COWLINGschen Zahl für verschiedene MACH-Zahlen als Parameter aufgetragen. Für $C=0$ ergeben sich die PRANDTLsche Werte. Mit wachsendem C steigt auch die Wellenlänge an, bis ein von der MACH-Zahl abhängiger kritischer Wert der COWLINGschen Zahl C_g erreicht ist. Für noch höhere Werte von C existiert die periodische Lösung nicht mehr. C_g hängt von der MACH-Zahl in folgender Weise ab:

$$C_g = 2/(M^2 - 1,5). \quad (44)$$

⁷ T. G. COWLING, Magnetohydrodynamics, Interscience Publishers Inc., New York 1957.

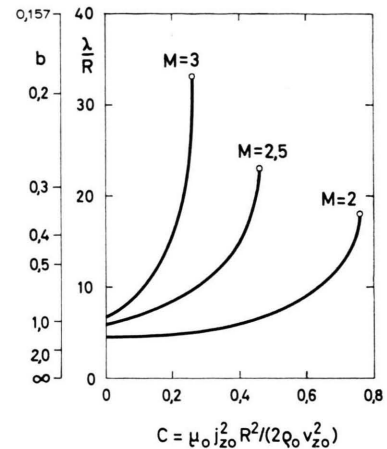


Abb. 3. Wellenlänge als Funktion der COWLINGschen Zahl C beim periodischen Strahl.

Abb. 4 zeigt die radiale Verteilung der axialen Komponente der Störgeschwindigkeit für verschiedene COWLINGsche Zahlen. Im Unterschied zur gasdynamischen Lösung ($C=0$) wird das Plasma auch am Strahlrand beschleunigt bzw. verzögert. Dies ist eine

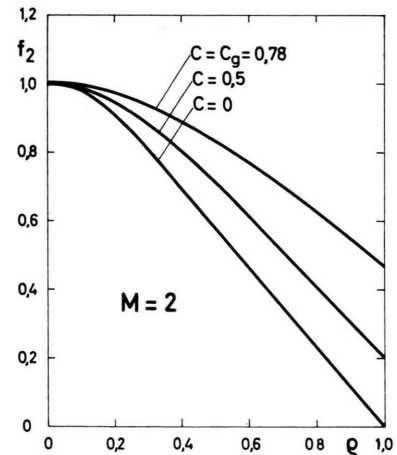


Abb. 4. Axiale Komponente der Geschwindigkeitsstörung als Funktion des normierten Radius beim periodischen Strahl.

unmittelbare Konsequenz der magnetischen Kräfte, wie man sofort aus der BERNOULLISchen Gleichung, erweitert um die magnetische Kraft, sieht:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{dp}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} d\left(\frac{B^2(R)}{2\mu}\right), \quad (45)$$

denn am Strahlrand ist $dp=0$.

Die Beschleunigung bzw. Verzögerung des Plasmas nicht nur in der Achse, sondern auch am Strahlrand, die bei höherem C nach Gl. (45) zunimmt, erklärt anschaulich die Zunahme der Wellenlänge

und das Versagen der periodischen Lösung bei einem C , das größer als der kritische Wert C_g ist. Durch das Zurückbleiben des Gases am Strahlrand entsteht ja in der Achse Unterdruck, der wieder zu einer Kontraktion des Strahls führt. Bei einer Mitbeschleunigung des Gases am Rand ist eine größere Strecke erforderlich, um den gleichen Unterdruck zu erzeugen. Schließlich bildet sich in der Achse überhaupt kein Unterdruck mehr aus und der Strahl wird nicht-periodisch.

2.6 Nicht-periodischer Strahl

Um Aussagen über den Strahl auch im Bereich $C > C_g$, wo die periodische Lösung versagt, zu erhalten, wird das Verhalten von exponentiellen Ansätzen für die Störgrößen studiert.

An Stelle von Gl. (16) tritt jetzt:

$$j_z^* = J \varphi(r) e^{-\beta z}, \quad (46)$$

und an Stelle von Gl. (21) treten die Gleichungen:

$$v_r^* = w f_1'(r) e^{-\beta z}, \quad v_z^* = -w \beta f_2(r) e^{-\beta z}. \quad (47)$$

Für diese Ansätze brauchen nicht alle Rechnungen wiederholt zu werden, da sich die Lösung hierfür durch Übergang zu imaginären Argumenten in der periodischen Lösung finden läßt. Im folgenden werden deshalb nur die Ergebnisse aufgeführt.

Für φ ergibt sich: $\varphi(r) = J_0(\beta r)$ (48)

und für die r -Komponente von \mathbf{j}^* :

$$j_r^* = J J_1(\beta r) e^{-\beta z}. \quad (49)$$

In Abb. 5 ist qualitativ das Feldlinienbild der Gesamtstromdichte $\mathbf{j} = j_{z0} \mathbf{e}_z + \mathbf{j}^*$ skizziert. Der Ansatz nach Gl. (46) ist nur in einem beschränkten Bereich von β sinnvoll. Da die Funktion $J_1(\beta r)$ in Gl. (49) bei $\beta r = 3,84$ eine Nullstelle hat, laufen alle Stromlinien an der Stelle $r = 3,84/\beta$ parallel

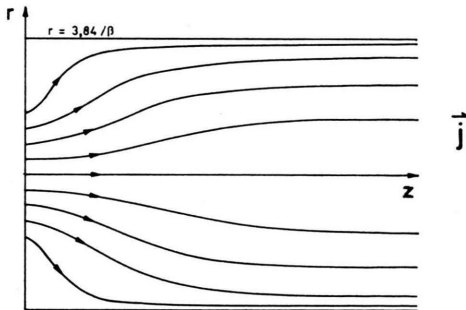


Abb. 5. Stromdichtelinien beim nicht-periodischen Strahl.

zur z -Achse. Wegen der festgelegten Richtung der Feldlinien kann in der Umgebung dieser Stelle die Randbedingung \mathbf{j} parallel \mathbf{v} nicht erfüllt werden. Im folgenden wird der Fall $\beta r < 1$ untersucht. Die Ergebnisse können sicher qualitativ auf den Fall höherer Werte von βr übertragen werden.

Aus den Gln. (47) kann wieder der Strahlrand sowie die Druckverteilung berechnet werden. Abb. 6 stellt beide Verläufe dar. Das Plasma expandiert ohne Überspringen auf den Außendruck, d. h. die $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ Kräfte wirken wie eine verlängerte LAVAL-Düse, die zum Parallelstrahl führt.

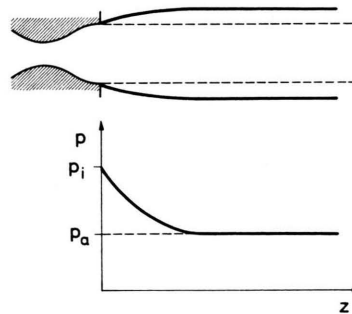


Abb. 6. Strahlrand und Druckverteilung in der Strahlachse beim nicht-periodischen Strahl.

Durch Lösen der Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen genau wie beim periodischen Strahl kann ein Zusammenhang zwischen dem Exponentialfaktor β in Gl. (45) und (46) bzw. $b = \beta R$ und der COWLINGSchen Zahl, die nach wie vor durch Gl. (42) gegeben ist, gefunden werden. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 7 für verschiedene MACH-Zahlen dargestellt. b nimmt mit C zu, d. h. der Übergang zum Parallelstrahl erfolgt bei einem fest vorgegebenen Druckverhältnis in der

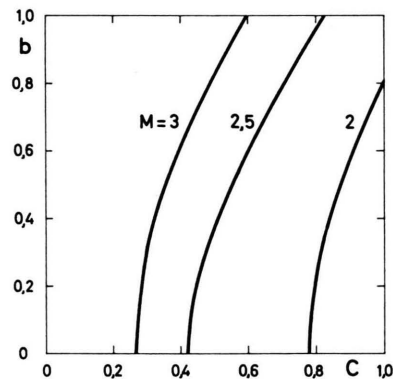


Abb. 7. Exponentialfaktor b als Funktion der COWLINGSchen Zahl C beim nicht-periodischen Strahl.

Achse auf einer um so kürzeren Strecke, je größer C ist. Dies liegt daran, daß die magnetischen Kräfte zweierlei bewirken:

Erstens baut die radiale Komponente einen Druck in der Achse auf, dessen Gradient eine axiale, aber auch eine radiale Beschleunigung des Plasmas bewirkt. An einer Erweiterungsstelle wirkt dieser Beschleunigungsanteil radial nach außen und ist somit für die mit wachsendem C schneller erfolgende Aufweitung des Strahls verantwortlich.

Zweitens beschleunigen die $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ Kräfte das Plasma direkt ohne Umweg über einen Druckaufbau. Dieser Anteil verhindert trotz der schnellen Aufweitung des Strahls eine Überexpansion.

2.7 Einfluß der magnetischen Reynolds-Zahl

Die Ergebnisse der vorigen Abschnitte wurden in der Näherung $R_m \ll 1$, d. h. bei Vernachlässigung der Rotation der induzierten Feldstärke gefunden. Die Lösung zeigt jedoch die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie weitgehend unabhängig von R_m ist, da die induzierte Feldstärke durch Oberflächenladungen am Strahlrand kompensiert werden kann. Dies ist immer möglich, wenn $\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ erfüllt ist, was in unserer Lösung in linearer Näherung der Fall ist und auch anschaulich aus der Tatsache folgt, daß z. B. an Strahlerweiterungsstellen eine höhere Geschwindigkeit, dafür aber ein niedrigeres Magnetfeld herrscht, so daß $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ konstant ist.

3. Experimentelle Untersuchungen an einem Überschallplasmastrahl mit axialem Strom

Eine experimentelle Nachprüfung der theoretischen Untersuchungen des ersten Teils erfordert eine Apparatur zur Erzeugung eines Überschallplasmafreistrahl, durch den in axialer Richtung ein elektrischer Strom geschickt werden kann. Die in der Theorie auftretende COWLINGsche Zahl

$$C = \mu j_{z0}^2 R^2 / 2 \varrho_0 v_{z0}^2$$

soll dabei die Größenordnung 1 erreichen.

Erstmalig wurde ein Überschallplasmastrahl von PETERS⁸ experimentell verwirklicht. In einer teilweise mit Wasser gefüllten Brennkammer brannte zwischen einer Kathode und einer Graphitanode, die zu einer LAVAL-Düse ausgestaltet war, ein Lichtbogen. Bei einem Überdruck in der Kammer von

50 atü erreichte der in die freie Atmosphäre austretende Plasmastrahl eine MACH-Zahl von etwa 1,7. Wegen der starken Abnutzung der Graphitelektroden wurde von PETERS⁹ eine Brennerkonstruktion mit erosionsfreien Elektroden (Wolframkathode, Anode aus wassergekühltem Kupfer) entwickelt. Allerdings ist es mit dieser Anordnung nicht mehr möglich, Überdrucke der genannten Größenordnung im Brennraum herzustellen. Will man dennoch mit diesem Brenner einen Überschallstrahl erzeugen, so bleibt nur die Möglichkeit, das Plasma von etwa Atmosphärendruck auf Unterdruck expandieren zu lassen. Für diese Maßnahme spricht außerdem die niedrige Dichte im Strahl, die die Verwirklichung hoher C -Werte wegen $C \propto 1/\varrho_0$ begünstigt. Nach diesen Gesichtspunkten wurde eine Plasmastrahlapparatur mit Brenner, Unterdruckkessel und Pumpenanordnung erstellt.

In Abb. 8 ist schematisch der Brenneraufbau dargestellt. Zwischen einer Kathode 1 und der LAVAL-Düse, die als Anode geschaltet ist, brennt ein Lichtbogen. Konzentrisch zur Kathode wird Argon in die Brennkammer eingeblasen. Das im Lichtbogen aufgeheizte Gas expandiert durch die LAVAL-Düse auf einen Außen-

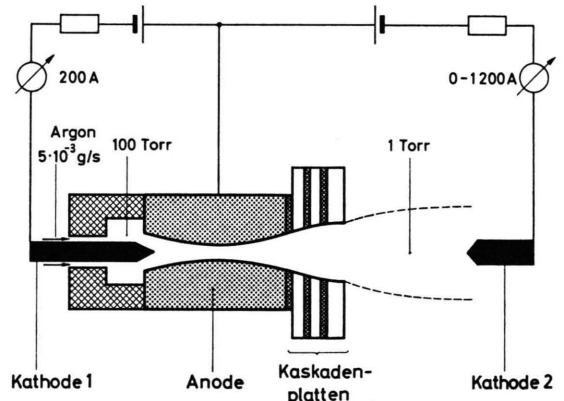


Abb. 8. Schematische Darstellung des Plasmabrenners.

druck der Größenordnung 1 Torr. Bei einem Gasdurchsatz von $5 \cdot 10^{-3}$ g/s stellt sich in der Brennkammer ein Druck von 100 Torr ein. In einer Entfernung von etwa 10 Düsenenddurchmessern ist im Freistrah die Kathode 2 eines zweiten Stromkreises angebracht, dem ebenfalls die LAVAL-Düse als Anode dient. Das letzte Stück der LAVAL-Düse besteht aus „Kaskadenplatten“, d. h. voneinander isolierten wassergekühlten Kupferplatten, die für den Lichtbogen so lange einen Isolator in axialer Richtung bilden, wie die Lichtbogenspannung längs der Plattendicke nicht ausreicht, um einen Kathoden- und Anodenfall an der Platte zu erzeugen.

⁸ TH. PETERS, Naturwiss. **24**, 571 [1954].

⁹ TH. PETERS, Astronaut. Acta **7**, 150 [1961].

Das Prinzip der „Kaskadierung“ von Bogengefäßen wurde erstmalig von MAECKER¹⁰ angegeben. Durch Kaskadierung des Düsenendes erreicht man, daß der äußere Lichtbogen nicht schon an der Düsenvorderseite ansetzt, sondern in die Düse bis zur Anode brennen muß. Der Vorteil einer Anordnung mit zwei Stromkreisen besteht darin, daß der engste Querschnitt stromfrei ist.

Der Strom in Kreis 1 wird konstant auf 150 A eingestellt. Die untersuchten Eigenschaften des Strahls erwiesen sich als weitgehend unabhängig von dieser Stromstärke.

Abhängig vom Strom in Kreis 2 verändert sich infolge JOULEscher Heizung in der Düse der Überdruck am Düsenende. Dieser Verlauf wurde mittels eines Ölmanometers, das an eine radiale Bohrung in die vorderste Kaskadenplatte angeschlossen ist, gemessen. In Abb. 9 ist der so ermittelte Druck am Düsenende (p_i), der bei Überschall vom Außendruck unabhängig ist, als Funktion des Stromes in Kreis 2 aufgetragen.

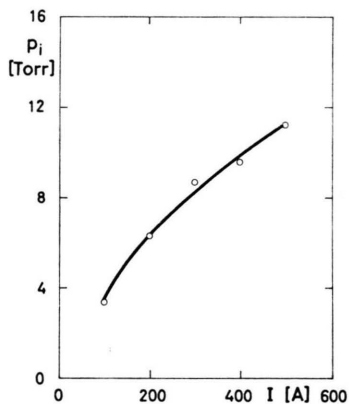


Abb. 9. Druck am Düsenende (p_i) als Funktion der Stromstärke im Strahl.

3.1 Strahlform

Zunächst wird die Leuchterscheinung der Entladung an Hand von photographischen Aufnahmen diskutiert. Die Abb. 10, 11 und 12 * zeigen eine Serie von Strahlaufnahmen bei einem konstanten Außendruck von $p_a = 2$ Torr und bei einem Strom von 100, 200 und 600 A durch den Strahl.

In Abb. 10 ist der theoretisch bei dieser niedrigen Stromstärke noch zu erwartende periodische Strahlrand gut zu erkennen, ebenso der erhöhte Druck an den Engstellen durch die höhere Leuchtdichte. Die helle Aureole in den Abb. 10 bis 12 konnte durch eine spektrographische Aufnahme als das Leuchten von zerstäubtem Kathodenmaterial identifiziert werden, das durch die Rückströmung

in die turbulente Mischungszone transportiert wird. Die Aureole markiert somit diese Turbulenzzone, die mit zunehmendem Abstand von der Düsenöffnung zur Strahlachse vorrückt und somit die Gültigkeit der (laminaren) Theorie begrenzt. In Abb. 10 sind deshalb die periodischen Verdichtungen etwa von da ab nicht mehr zu beobachten, wo die turbulente Mischungszone die Strahlachse erreicht hat.

In Abb. 11 ist die Strahlstruktur wesentlich weniger ausgeprägt, obwohl nach Abb. 9 der Überdruck am Düsenende höher ist. Die erste Verdichtung ist gerade noch zu erkennen.

In Abb. 12 schließlich, bei 600 A, ist keine Verdichtung im Strahl mehr nachzuweisen, weder am Strahlrand, noch als helleres Leuchten in der Achse. Die größere Strahlbreite bei wachsender Stromstärke liegt einerseits an dem höheren Druck am Düsenende (Abb. 9), andererseits daran, daß der leitfähige Bereich, der etwa durch die Leuchterscheinung markiert wird, über den Strahlrand, der als innere Begrenzung der Aureole anzusehen ist, hinausreicht.

Der Übergang vom periodischen zum nicht-periodischen Strahl, der theoretisch durch die Grenze der Brauchbarkeit verschiedener Ansätze gegeben ist, erfolgt demnach im Experiment stetig. Der Unterschied dürfte daran liegen, daß in der Theorie die Randbedingungen an der Düsenmündung nicht berücksichtigt werden, sowie an der erwähnten Zunahme des leitfähigen Querschnitts über den Strahlrand hinaus, wodurch ja die Periodizität gestört wird.

3.2 Mach-Zahl- und Druckmessungen

Um über diese Beobachtungen hinaus einen quantitativen Vergleich von Theorie und Experiment zu gewinnen, wurden MACH-Zahl und Druckverteilung in der Strahlachse gemessen.

Die MACH-Zahl wurde aus der Stoßwellenneigung an einer kleinen wassergekühlten Kegelsonde bestimmt. Messungen von TEMPELMAYER und DICKS¹¹ lassen vermuten, daß sich die Argonplasmaströmung in guter Näherung durch einen Isentropenexponenten $\gamma = 1,67$ beschreiben läßt. Wegen der niedrigen Dichte insbesondere bei hohen Stromstärken konnte die MACH-Zahl mit dieser Methode nicht im ganzen Strahl, sondern nur direkt an der Düsenmündung, wo ein höherer Druck herrscht, gemessen werden.

¹⁰ H. MAECKER, Z. Naturforsch. 11 a, 457 [1956].

* Abb. 10–12 auf Tafel S. 1268 a.

¹¹ K. E. TEMPELMAYER u. J. B. DICKS, ARO Rep Nr. 632 031.

Abb. 13 zeigt die so gewonnenen MACH-Zahlen an der Düsenmündung als Funktion der Stromstärke durch den Strahl. Die MACH-Zahl sinkt zunächst stark ab, was auf die Heizungswirkung des äußeren Stromes in der Düse zurückzuführen ist.

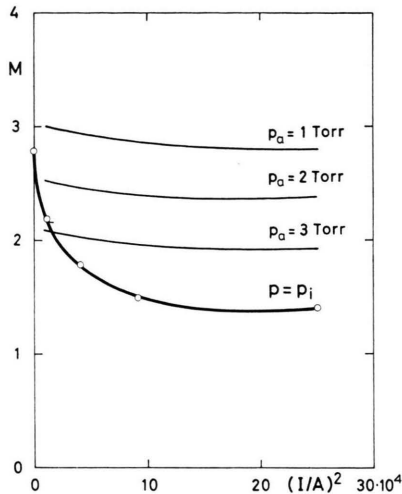


Abb. 13. MACH-Zahl am Düsenende (dicke Kurve) und mittlere MACH-Zahl im Strahl (dünne Kurven) bei verschiedenen Außendrucken als Funktion des Quadrats der Stromstärke im Strahl.

Bei etwa 500 A erreicht die MACH-Zahl am Düsenende ein Minimum und steigt danach wieder mit wachsendem Strom an. Das bedeutet, daß oberhalb 500 A die magnetische Beschleunigung in der Düse die Heizungswirkung des Stromes überwiegt.

In die Theorie geht die mittlere MACH-Zahl im Strahl ein. Diese wurde aus der MACH-Zahl und dem Druck am Düsenende unter Annahme isentroper Expansion abgeschätzt. Die so erhaltenen Werte der mittleren MACH-Zahl im Strahl für verschiedene Außendrucke sind in Abb. 13 als Funktion der Stromstärke mit eingezeichnet.

Die statische Druckverteilung auf der Achse wurde mit einer bootsförmigen Sonde gemessen, die empirisch so entwickelt wurde, daß die Messung durch Stoßwellen nicht verfälscht wird.

Die Abb. 14, 15 und 16 zeigen in normierter Darstellung die gemessene Druckverteilung bei 2 Torr mit 100, 200 und 400 A durch den Strahl. Der Übergang vom periodischen zum nicht-periodischen Strahl vollzieht sich demnach im Experiment wie schon unter 3.1 erwähnt durch zunehmende Dämpfung der Druckwellen. Bei 500 A kann gerade noch ein Druckmaximum nachgewiesen werden, bei 600 A ist keine Verdichtung mehr festzustellen.

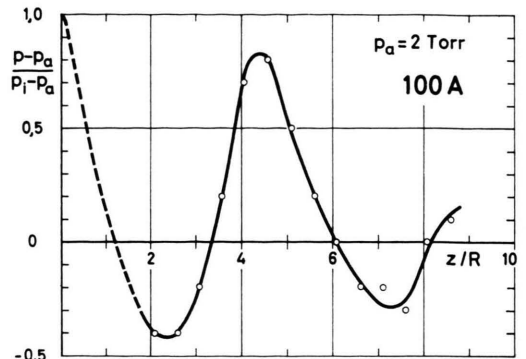


Abb. 14. Normierter Druckverlauf in der Achse des Strahls bei 2 Torr und 100 A.

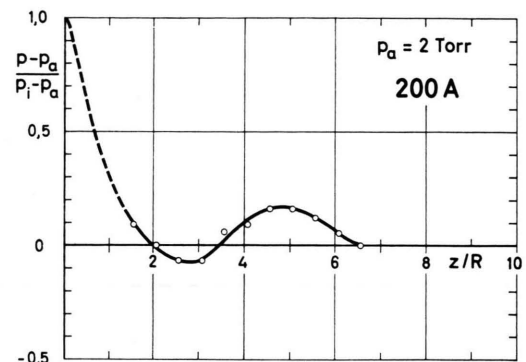


Abb. 15. Normierter Druckverlauf in der Achse des Strahls bei 2 Torr und 200 A.

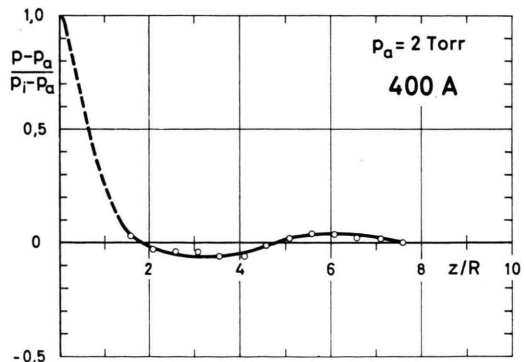


Abb. 16. Normierter Druckverlauf in der Achse des Strahls bei 2 Torr und 400 A.

Ähnliche Kurven wurden bei verschiedenen anderen Außendrucke p_a aufgenommen. Danach erweist sich die Druckverteilung im Strahl als sehr stark abhängig von p_a . Bei 1 Torr ist ein Strom von etwa 400 A die obere Grenze, bei der gerade noch eine Druckerhöhung nach einer Wellenlänge festgestellt werden kann. Bei 4 Torr dagegen ist noch bei 1000 A der erste Druckberg nachzuweisen.

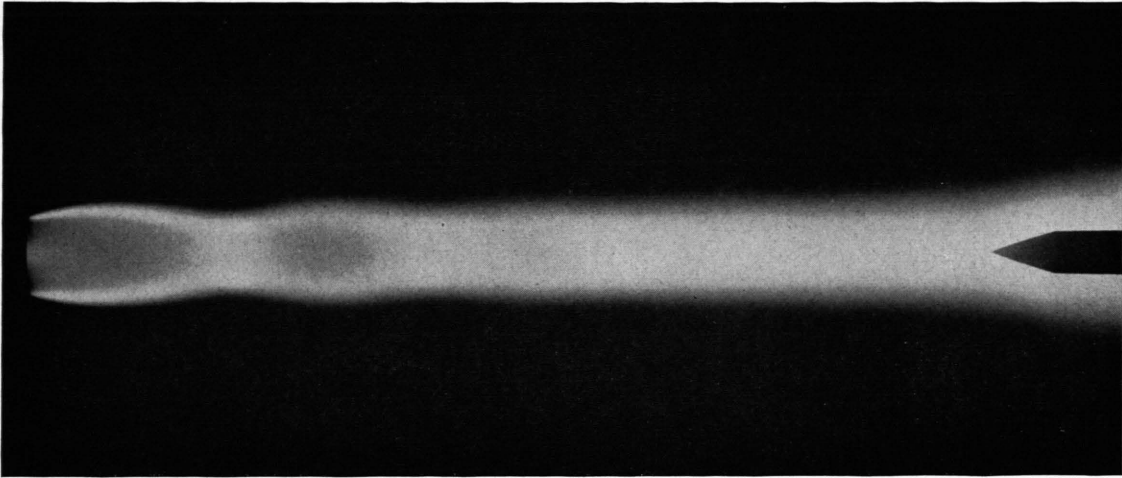


Abb. 10. Aufnahme des Strahls bei 2 Torr und 100 A.

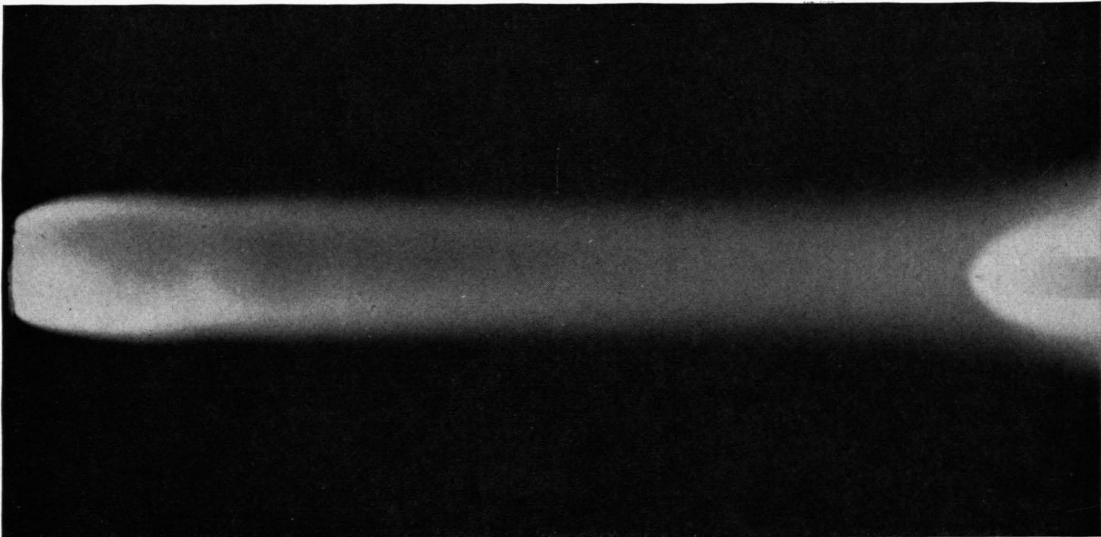


Abb. 11. Aufnahme des Strahls bei 2 Torr und 200 A.

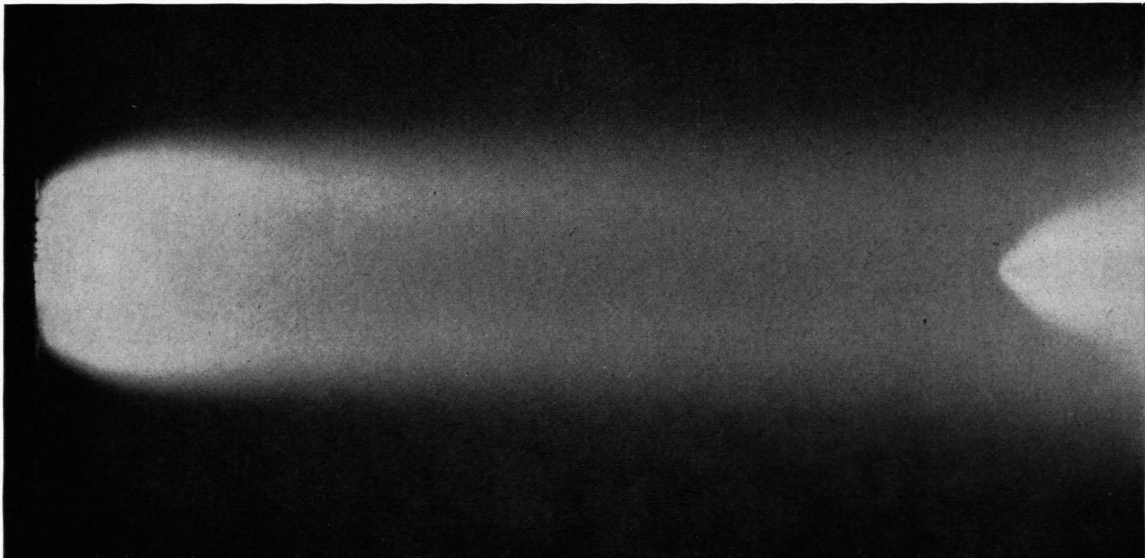


Abb. 12. Aufnahme des Strahls bei 2 Torr und 600 A.

Um auch einen Vergleich bezüglich der COWLINGschen Zahlen durchzuführen, wird Gl. (42) mit $M = v_{z0}/c$ und $c^2 = n p_a / \rho_0$ sowie mit $I = j_{z0} R^2 \pi$ umgeformt in

$$C = \mu I^2 / (2 M^2 n p_a R^2 \pi^2). \quad (50)$$

Gl. (50) enthält dann nur bekannte Größen und gestattet daher einen quantitativen Vergleich. Abb. 17 zeigt die so experimentell erhaltenen Meßwerte für

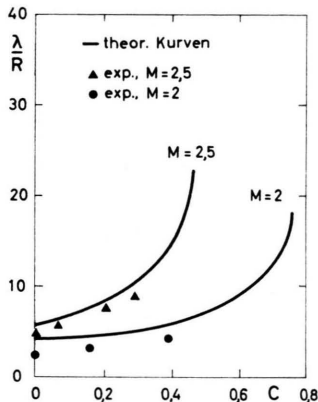


Abb. 17. Vergleich von theoretischen und experimentellen Werten der Wellenlänge aufgetragen über der COWLINGschen Zahl C .

die Wellenlänge als Funktion von C sowie die theoretischen Kurven. Die Meßwerte liegen etwas unterhalb der zugehörigen theoretischen Kurve, was auch

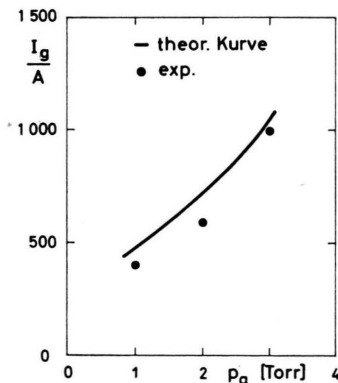


Abb. 18. Vergleich der kritischen Stromstärke I_g (Übergang vom periodischen zum nicht-periodischen Strahl) zwischen Theorie (Kurve) und Experiment (Punkte) in Abhängigkeit vom Druck.

schon in der Gasdynamik beobachtet wurde. Das Ansteigen der Wellenlänge mit wachsendem C wird zunächst gut wiedergegeben. Im Experiment verschwinden jedoch die Druckberge schon bevor die theoretische Grenze des periodischen Strahls erreicht ist.

Gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ergibt ein Vergleich der Druckabhängigkeit des kritischen Werts des Stromes I_g , bei dem der Übergang vom periodischen zum nicht-periodischen Strahl erfolgt. Diese theoretischen und experimentellen Werte für I_g sind in Abb. 18 dargestellt.

4. Schlußbemerkung

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sich sowohl aus theoretischen als auch aus experimentellen Untersuchungen ein entscheidender Einfluß magnetischer Kräfte auf die Druckverteilung in einem Überschallplasmastrahl mit axialem Strom ergibt. Ab einer bestimmten Grenzstromstärke zeigt der unterexpandierte Strahl nicht die aus der Gasdynamik bekannten periodischen Verdichtungen. Die magnetischen Kräfte führen zum Parallelstrahl, wirken also wie eine verlängerte LAVAL-Düse, und zwar selbst bei sehr hohen Druckdifferenzen zwischen p_i und p_a , wo im Gasstrahl Verdichtungsstöße, die starke Verluste mit sich bringen, auftreten. Somit kann ein wesentlicher Teil der Expansion in das Gebiet vor der Düse verlegt werden, wodurch die Wärmeverluste in der wassergekühlten Düse umgangen werden können. Hinzu kommt eine zusätzliche magnetische Beschleunigung in dem Aufweitungsgebiet vor der Düse. Da ferner im Strahl eine starke Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit durch den durchgehenden Strom erreicht wird, eignet sich diese Anordnung zum Studium magnetogasdynamischer Effekte. Es erscheint möglich, magnetische REYNOLDS-Zahlen von $R_m > 1$ zu erzeugen, was bislang nur mit Stoßwellen erreicht wurde.

Herrn Prof. Dr. H. MAECKER danke ich für seine Unterstützung sowie für wertvolle Anregungen. Herrn Dr. TH. PETERS bin ich für sein Interesse an der Arbeit und für vielfache Hilfe zu Dank verpflichtet. Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgesellschaft gefördert.